

雨氷のビジュアルシミュレーション Visual Simulation of Glazed Frost

石川 知一 Yonghao Yue 渡辺 大地 岩崎 慶

土橋 宜典 柿本 正憲 近藤 邦雄 西田 友是

Tomokazu ISHIKAWA^{†1} Yonghao YUE[‡] Taichi WATANABE[†] Kei IWASAKI^{*}

Yoshinori DOBASHI[¶] Masanori KAKIMOTO[†] Kunio KONDO[†] Tomoyuki NISHITA[§]

† 東京工科大学

† Tokyo University of Technology

‡ 東京大学 (現 Columbia University (日本学術振興会 海外特別研究員))

‡ The University of Tokyo (Columbia University (JSPS Postdoctoral Fellowship for Research Abroad))

* 和歌山大学

* Wakayama University

¶ 北海道大学

¶ Hokkaido University

§ 東京大学 (現 広島修道大学/UEI リサーチ)

§ The University of Tokyo (Hiroshima Shudo University / UEI Research)

1. はじめに

コンピュータグラフィクス(CG)において、自然現象の可視化は映画やゲームなど映像制作の分野で需要がある。実世界では観測することが困難な気象現象でも、美しい景観となるものはCGによって再現することは重要である。本稿では、希少な大気条件によって発生する雨氷に注目する。

雨氷とは、雨滴が不純物を含まないために、過冷却状態でも凝固せず、地面や木などの物体に衝突することで凍った透明な氷のことである。実際に撮影された雨氷の写真を図1に示す。着氷性の雨は衝突した物体表面に沿って流れ、その間に凍結するため枝などの衝突した物体表面を覆うように氷層が形成される(図1(a))。また、風の影響を受けて風上側に多く付着する様子も観察されている(図1(b))。枝などの物体に衝突して凍結または昇華することで、氷層が形成される現象は着氷現象と呼ばれ、雨氷の他に樹氷、霜がある。霜のように物体表面に氷の結晶が形成されるシミュレーション方法はKimらによって提案されている[1]。しかし、着氷性の雨では過冷却状態を考慮する必要があり、流れ落ちる効果を表現するためには流体計算を必要とする。この計算を行って雨氷を表現した研究は、我々が知る限り無い。本稿において、流体計算はFLIP (Fluid Implicit Particle) 法によって計算し、粒子と外部の熱の授受を計算することによって雨氷の形成アニメーションを生成することを目的とする。



(a) 雨氷が付着した枝先



(b) 枝の片側に多く付着する雨氷

図1: 雨氷の写真 (wikipedia より引用)

2. 既存研究

CGの分野において、氷・雪の研究は古くから行われている。雪のレンダリングについての研究ではNishitaらの方法がある[2]。Kimらは二次元平面において、熱伝導方程式を解くことによって氷の結晶構造を生成する方法を提案した[1]。Kimらの成果から、熱伝導が氷晶を形成する上で重要であることがわかる。

高橋らは雪の踏み固めを表現する方法を提案した[3]。SPH (Smoothed Particle Method) 法に焼結の効果を導入することで、物体に対して付着する雪を計算している。本研究においても、氷は粒子として計算し付着力を導入することにより、着氷現象を再現することを提案する。

IwasakiらはSPH法を利用して氷と水との相互作用を高速に計算する手法を提案した[4]。この手法では、氷は剛体として計算され、GPUによって高速に計算で

¹ ishikawatm@stf.teu.ac.jp

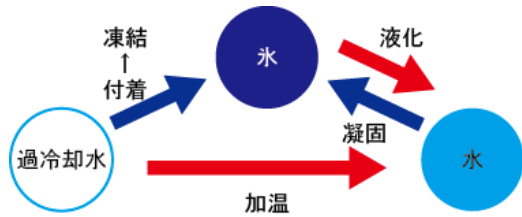


図 2: 提案法で考慮する相転移

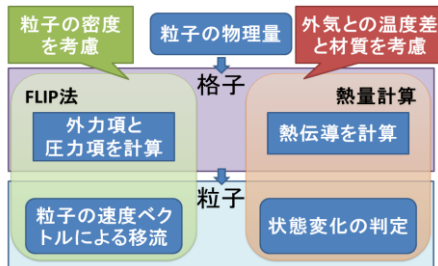


図 3: 提案法の処理フロー

きることを示した。つららや水が瞬時に凍りつく様子は表現されているが、過冷却については考慮されていない。

本研究では、流体现象を計算するために FLIP 法を採用する。FLIP 法は Zhu らによって CG 界での利用の可能性が示唆され[5]、今日では改良研究が盛んに行われ、産業界において水や炎のような流体现象を再現するために広く利用されている。

過冷却水の数値計算は計算物理の分野でも行われている[6]。近年のスーパーコンピュータの性能向上に伴い、過冷却水の分子運動まで計算し、水分子のまま氷点下 41℃まで冷却できることが数値計算的に解明された[7]。また、実際に観測された雨水現象に対して大気の熱的環境を検証した報告もある[8]。この報告では、雨水が発達する条件には気温、湿度、風速、降水量が関係することが確認されている。我々はこれらの事実をもとに、実用可能なモデルを提案し、雨水のビジュアルシミュレーションを実現する。

3. 雨水のシミュレーション

この節では、まず提案法における雨水のモデリング方法について説明し、FLIP 法における熱の授受の計算方法について説明する。

3.1. 雨水のモデリング

FLIP 法は流体の挙動を格子法と粒子法の 2 種類を組み合わせるハイブリッドな方法である。流体は非圧縮性・粘性流体を想定する。流体の速度更新のための Navier-Stokes 方程式を以下に示す。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{F} \quad (2)$$

ここで、 \mathbf{u} は速度、 t は時間、 ρ は密度、 p は圧力、 μ は動粘性率、 \mathbf{F} は風などの外力を表す。表面張力の影響については 3.2.2 節で説明する。FLIP 法では外力項、圧力項による速度場の更新は格子法で行い、移流項の計算は粒子法によって計算する。

本研究では、流体である雨水を雨滴の状態から粒子として表現する。半径 r_d の粒子 i は、中心に速度 \mathbf{v}_i 、温度 $T_{p,i}$ 、状態 S_i を保持する。また、雨水はいくつかの粒子によって構成され、雨水の粒径分布 $N(D)$ は、以下の Marshall Palmer 分布に従うものとする[9]。

$$N(D) = N_0 \exp(-\lambda D) \quad (3)$$

ここで、 D は雨滴の粒径、 N_0 、 λ はそれぞれ初期値、勾配を表すパラメータである。粒径 D の雨滴は、その体積を近似できるような適切な粒子の個数を用いて再現する。すなわち、

$$n \leq \frac{D^3}{8r_d^3} \quad (4)$$

となる最大の自然数 n を粒径 D の雨滴に使用する粒子の個数とした。式(4)を満たす自然数 n が存在しないほど小さな粒径 D は考慮しない。

提案法で考慮する状態変化を図 2 に示す。過冷却水の水粒子は衝突した物体表面において、熱量バランスを考慮し、凝固の判定を計算する。この際、凝固しなかった過冷却水は流れ落ちることになる。氷が外気の温度によって水に変化する過程や、水が氷に変化する過程も計算する。氷晶の形成には、水蒸気から氷に変化する昇華も考えられるが、昇華による氷晶の量は雨水に比べてかなり小さいことから考慮しないこととする。

植物などの物体も粒子によって表現する。FLIP 法によって更新されるのは水粒子のみで、植物などの物体の粒子や着氷した氷の粒子は流体計算において固定境界とする。植物などの物体を表す粒子においても温度を保持しておき、外気との熱の授受は計算する。また、過冷却水が生成される過程は計算せず、シミュレーション空間に降り注ぐ雨はすべて過冷却状態として計算を開始する。

3.2. 提案法

我々は FLIP 法に熱の授受の計算を組み合わせる手法を提案し、雨水の形成をシミュレーションする。図 3 に 1 タイムステップ中の処理の流れを示す。まず、FLIP 法によって粒子から格子に速度および熱を配分する。熱の伝導は粒子間では行わず、格子間で計算する。熱の伝導を計算した後に、粒子に熱を配分する。

また、過冷却水が植物などの物体に衝突した後、付着力を計算する。衝突した物体表面に付着し、凍結するまでの速度は、雨水表面の熱フラックスを考慮して計算する。

3.2.1. 粒子と格子における熱の授受

粒子とその粒子が属する立方格子の間で行う熱の配分は、以下のフーリエの法則に従う。

$$\Delta Q_i = -k_i A \frac{dT_i}{dx} = -k_i A \frac{T_{air} - T_{p,i}}{r} \quad (5)$$

ここで、 ΔQ_i は粒子 i が格子と授受する熱量、 k_i は熱伝導率、 A は粒子の表面積、 dT_i は粒子と周囲の温度差で T_{air} はその粒子が属する格子の温度である。この熱量の授受による、粒子の温度変化 ΔT_i は次の熱量の式によって計算する。

$$\Delta T_i = \frac{\Delta Q_i}{m_i c_i} \quad (6)$$

ここで、 m_i は粒子の質量、 c_i は粒子の比熱を表す。粒子の質量や比熱は水滴と植物などの物体で異なる値を用いる。

格子間における熱の伝導は、以下の熱伝導方程式を解くことで行う。

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial \mathbf{x}^2} \quad (7)$$

ここで、 a は熱拡散率、 \mathbf{x} は空間座標を表す。本手法では、FLIP 法による速度場の更新において CFL (Courant Friedrichs Lewy) 条件を考慮したタイムステップを定める。このタイムステップを熱伝導方程式の数値解法でも用いることを考え、任意の時間間隔で安定的に解ける陰的スキームの 1 つであるクランクニコルソン法を採用する。

3.2.2. 付着力の計算

過冷却状態の雨が植物などの物体や既にできている雨水と衝突した場合の着氷を表現するために、物体表面に対する表面張力と界面張力を計算する。これらの力を総合して付着力と呼び、付着力 $\mathbf{F}^{sticking}$ を以下の式で計算する。

$$\mathbf{F}_i^{sticking} = \sum_{j \in N_i} \kappa_j \frac{\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i}{\|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i\|^2} \quad (8)$$

ここで、 \mathbf{p}_i は粒子 i の位置、 κ は付着力を決めるための定数である。 N_i は粒子 i が属する格子とそれに隣接する 6 個の格子に存在する粒子の集合で、付着力はその集合に属する粒子 j からの影響を考慮する。このとき使用する格子は FLIP 法で用いている格子と同じものである。衝突判定も集合 N_i に限定して行うことで、計算の効率化を図る。

3.2.3. 熱量バランスによる凍結の条件判定

衝突した物体表面に付着した水滴が凍結する速度を求める。凍結する速度は熱フラックスの和 Q を用いて計算する。

$$Q = Q_s + Q_i + Q_f \quad (9)$$

ここで、 Q_s は顕熱フラックス、 Q_i は潜熱フラックス、 Q_f は水膜が凍結するのに必要な熱フラックスである。

$$Q_s = -\pi h_a \Delta T \quad (10)$$

$$Q_i = -\pi L_e h_v \Delta \rho_v \quad (11)$$

$$Q_f = L_f w \quad (12)$$

ここで、式(10)の h_a は大気の大気熱交換係数、式(11)の h_v は水蒸気交換係数パラメータであり、風速と雨水が付着した枝の半径から求める関係式があるが、本研究では定数として扱った。また、式(11)の L_e は水の蒸発潜熱、 $\Delta \rho_v$ は水蒸気密度の差であり、これらも定数とした。式(12)の L_f は水の凍結潜熱であり、 w は降水強度 R と風速 V の関係から求められる降水フラックスで次の式で求められる。

$$w = \left\{ (R/3.6)^2 + (0.067R^{0.846}V)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \times 10^{-3} \quad (13)$$

式(9)で計算される熱フラックスの和 Q が負の値で小さいほど、早く凍結することが知られており [6]、本研究では凍結までの時間は負の値をとる Q_s と Q_i の時間積分が、単位面積あたりの凍結までに必要な熱量 H_f を超えるかを条件として用いた。すなわち、

$$H_f \geq \int |Q_s + Q_i| dt \quad (14)$$

を凍結の条件判定とした。積分は付着している時間に限定し、凍結前に重力の影響や他の雨滴によって流れ、雨水表面に付着していない場合は凍結しないこととした。

4. 結果

シミュレーションの実装には C++ と nVIDIA CUDA を使用した。シミュレーション結果の可視化には OpenGL、最終結果の可視化には Autodesk 3ds Max を用いた。実験環境として Intel Core i7 3.20GHz、16.0GB RAM、グラフィックボードとして nVIDIA GeForce GTX 580 搭載の PC で実験を行った。

まず、提案法による熱の授受を厳密解と比較して、その計算精度を確認した。この実験は 2 次元で行い、そのシミュレーション条件を図 4 に示す。シミュレーション空間の中央に円形の物体を置き、外気と物体の熱の授受を計算して温度の時間変化を算出する。この

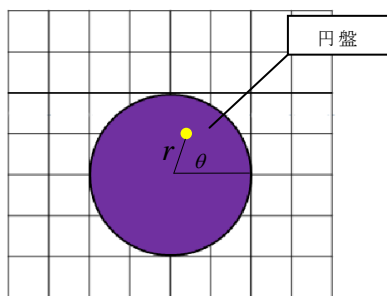


図 4：検証実験用のシミュレーション空間

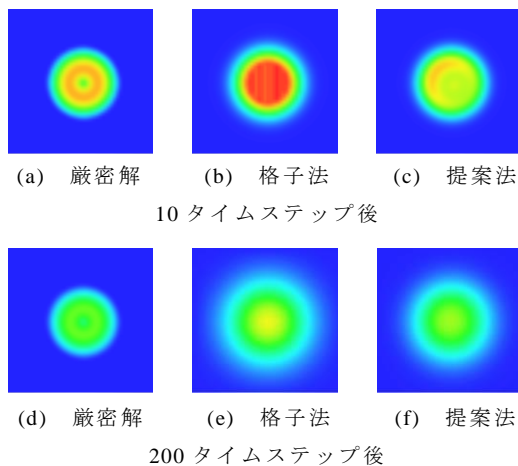


図 5：検証実験の可視化結果

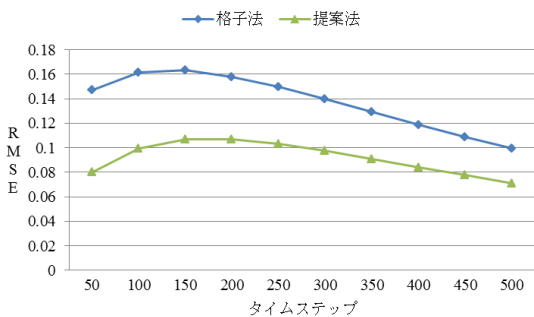


図 6：RMSE による厳密解と計算結果の誤差評価

表 1：検証実験における空間離散化の条件と計算時間

	格子法	提案法
格子数	50×50	50×50
粒子数	—	1000
1タイムステップあたりの計算時間	6.0ms	8.2ms

場合の円盤上の極座標 (r, θ) における時刻 t の厳密解は以下の式で計算される。

$$T(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\mu_{m,n} t} J_n(\mu_{m,n} r) (A_{m,n} \cos n\theta + B_{m,n} \sin n\theta) \quad (15)$$

ここで、 J_n は n 次の Bessel 関数、 $\mu_{m,n}$ は J_n の正の零点の小さい方から m 番目の値である(その他の係数については付録を参照)。提案法では、シミュレーション空間を粒子と格子で離散化する。厳密解と各手法とで温

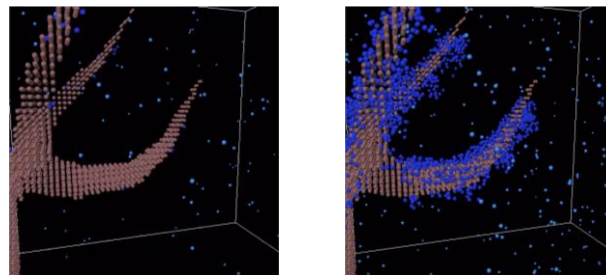


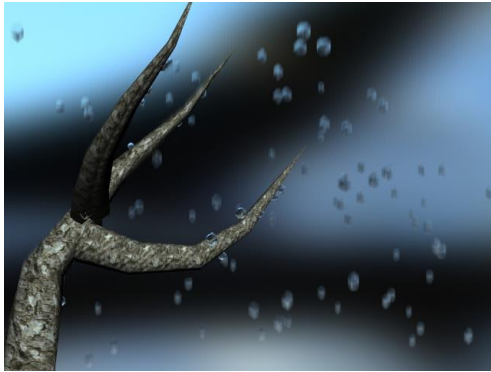
図 7：雨氷の形成シミュレーション結果

表 2：シミュレーションに使用したパラメータ

パラメータ	意味	値	単位
dt	タイムステップ	1.0	s
ρ	液体の密度	1.0×10^3	kg/m^3
μ	動粘性定数	1.792×10^{-6}	m^2/s
N_0	Marshall Palmer 分布の初期値	8.0×10^3	$\text{mm}^{-1}\text{m}^{-3}$
λ	Marshall Palmer 分布の勾配	0.1192×10^3	m^{-1}
r_d	粒子半径	1.0×10^{-3}	m
k	熱伝導率	0.569	$\text{W}/(\text{m} \cdot \text{K})$
c	比熱	4217	$\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$
a	熱拡散率	0.1349×10^{-6}	m^2/s
κ	付着力の係数 (液体)	0.5	N
κ	付着力の係数 (固体)	2.0	N
h_a	大気熱交換係数	5.69	$\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$
h_v	水蒸気交換係数	0.05	m/s
L_e	蒸発潜熱	2.498	J/kg
$\Delta\rho_v$	水蒸気密度の差	1.61×10^{-3}	kg/m^3
L_f	凍結潜熱	333.4×10^3	J/kg
R	降水強度	25×10^{-3}	m/h
H_f	凍結に必要な熱量	333.4	J/m^3

度の値について、空間離散化の条件と計算時間の比較を表 1 に、時間変化を可視化した結果を図 5 に示す。また、RMSE による厳密解と計算結果の誤差結果の比較を図 6 に示す。提案法は、格子法による数値計算と同様に安定で、少ない誤差で計算できていることが確認できた。厳密解との誤差は特に境界付近で大きいため、提案法における境界条件は検討の余地がある。

雨氷の形成シミュレーションの結果を図 7 に示す。図中の褐色の粒子は木の枝を、薄い青色は液体の水または過冷却水を、濃い青色は氷(雨氷)を表している。シミュレーション時に使用した各パラメータの値を表 2 に示す。シミュレーションに用いた粒子数は液体も枝などの物体も含めて約 20,000 個、シミュレーション空間は $128 \times 128 \times 128$ の格子で空間を分割して、計算時間は 1 タイムステップあたり 20 ミリ秒であった。3ds Max に搭載されている mental ray によるレンダリング



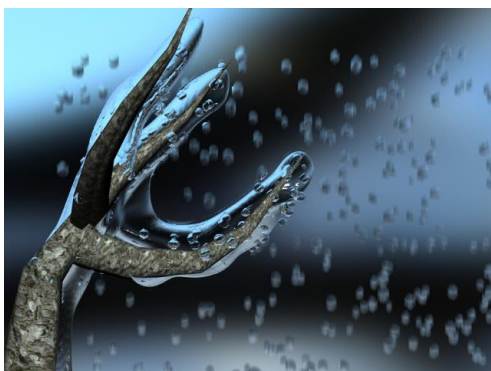
(a) 1,000 タイムステップ後



(b) 4,000 タイムステップ後



(c) 7,000 タイムステップ後



(d) 10,000 タイムステップ後

図 8 : 雨氷の形成シミュレーションのレンダリング結果

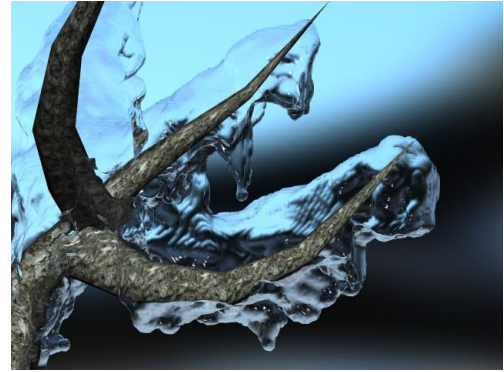


図 9 : つらら形状の雨氷の形成シミュレーション結果



図 10 : 風を考慮した雨氷の形成シミュレーション結果

結果を図 8 に示す。Yu らの手法[10]を用いて雨氷を形成している粒子群に限定して境界面を計算した。また、雨氷には氷の屈折率のパラメータを与えた。表面抽出には平均して 30 秒かかり、レンダリングは 1 フレームあたり約 3 分かかった。

過冷却水は衝突によってすぐに氷となるものと、流れ落ちる間に凝固するものがあることがわかる。これは熱フラックスを考慮した結果で、凍結までの時間を計算しているために表現できる。この効果によって、雨氷で特徴的な枝を覆うような氷を表現することができる。

熱的環境のパラメータを変更し、周囲の温度が 0°C よりも高い場合に枝の上部で付着せず、流れ落ちる過程で凍結する様子をシミュレーションした(図 9)。過冷却状態を考慮しているため、物体表面に衝突して着氷するものと、氷から水に変化して流体现象を計算することにより、つららが形成される様子を再現することができる。また、FLIP 法により風のような外力を考慮することもできる。画像の右側から風が吹くようにシミュレーション空間に速度場を与えた。木の枝の風上側に多くの雨氷ができる様子も再現できる(図 10)。

5. まとめと今後の課題

FLIP 法と親和性の高い熱量計算の方法を提案し、雨氷の形成シミュレーションに応用した。実際の雨氷形

成時に確認されている熱的環境を考慮して、過冷却状態の雨滴が付着して凍結する様子のシミュレーションを行った。

本稿では雨氷を粒子によってモデリングした。着氷現象には樹氷や霜があり、大気中の水蒸気を考慮すべき問題がある。これは格子に水蒸気量のデータを保持しておくことで解決することができると考えており、FLIP 法をベースとして雨氷以外の着氷現象を統一的に計算する手法を提案することが今後の課題である。

参考文献

- [1] T. Kim, M. Henson and M. C. Lin, "A Hybrid Algorithm for Modeling Ice Formation", Proceedings of the 2004 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation, pp.305-314, 2004.
- [2] T. Nishita, H. Iwasaki, Y. Dobashi, E. Nakamae, "A Modeling and Rendering Method for Snow by Using Metaballs" Computer Graphics Forum, Vol. 16, No. 3, pp.357-364, 1997.
- [3] 高橋 哲也, 藤代 一成, "雪の踏み散らしシミュレーション", Visual Computing グラフィクスと CAD 合同シンポジウム 2012 DVD 予稿集, No.8, 2012.
- [4] K. Iwasaki, H. Uchida, Y. Dobashi, T. Nishita, "Fast Particle-based Visual Simulation of Ice Melting", Computer Graphics Forum, Vol. 29, pp.2215-2223, 2010.
- [5] Y. Zhu and R. Bridson, "Animating Sand as a Fluid", In Proceedings of the ACM SIGGRAPH 2005, pp.965-072, 2005.
- [6] 阪井 一繁, "過冷却を伴う凝固過程の数値シミュレーション(自由境界問題の数値解析とその周辺)", 数理解析研究所講究録, Vol.744, pp.112-120, 1991.
- [7] E. B. Moore and V. Molinero, "Structural Transformation in Supercooled Water Controls the Crystallization Rate of Ice", Nature, Vol. 479, pp. 506-508, 2011.
- [8] 松下 拓樹, 尾関 俊浩, 西尾 文彦, "2004 年 2 月に北海道・岩見沢付近で発生した雨氷現象の特徴", 社団法人日本気象学会, Vol.52, pp.675-680, 2005.
- [9] J.S. Marshall and W.M. Palmer, "The distribution of raindrops with size," Journal of Meteorology, Vol. 5, pp. 165-166, 1948.
- [10] J. Yu, G. Turk, "Reconstructing Surfaces of Particle-Based Fluids Using Anisotropic Kernels", Proceedings of the 2010 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation, pp.217-225, 2010.

付録

A. 円盤領域の熱拡散方程式における厳密解の係数式(15)中の J_n は Bessel 関数で、以下の式で計算される。

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k} \quad (A1)$$

また、式(15)中のパラメータは、

$$A_{mn} = \frac{2}{\pi J_{n+1}(\mu_{m,n})^2} \int_0^1 \left(\int_{-\pi}^{\pi} T(r, \theta, 0) J_n(\mu_{m,n} r) \cos n\theta d\theta \right) r dr \quad (A2)$$

$$B_{mn} = \frac{2}{\pi J_{n+1}(\mu_{m,n})^2} \int_0^1 \left(\int_{-\pi}^{\pi} T(r, \theta, 0) J_n(\mu_{m,n} r) \sin n\theta d\theta \right) r dr \quad (A3)$$

で定められる定数である。